21. RC-Generator

Aufgabe:

Die Arbeitsweise des Wien-Robinson-Brückenoszillators ist zu analysieren.

Gegeben:

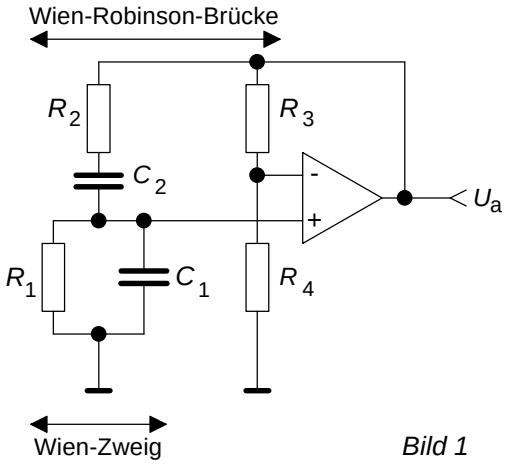

Bild 1

$$K_3 = \frac{U_P}{U_a} \qquad\qquad K_r = \frac{U_N}{U_a}$$

Gesucht:

- K_3 für den Wien-Zweig;
- ω_0 wenn phasengleich mit U_a;
- K_3 für den Sonderfall $R_1=R_2$; $C_1=C_2$; dazu Ortskurve und Phasenverlauf als Funktion der Frequenz;
- aus φ_{K3} die Phasensteilheit bei $\omega = \omega_0$
- Für $K=K_3-K_r$ die Bedingung für Mitkopplung bei "Resonanz", d. h. $|KV_0|_{\omega_0} = 1$ und $(\varphi)_{\omega_0} = 0$, sowie Ortskurve und Phasengang von K und Vergleich mit K_3, Phasensteilheit von K bei $\omega \cong \omega_0$ und äquivalente Güte $Q_{äqu}$;
- für $R_1=R_3=10$ kΩ, $R_1C_1=R_2C_2$, $R_4=160$ Ω, f_0 = 7,5 Hz die restlichen Bauelemente (man setze $U_P = U_N$, d. h. $\varepsilon = 0$).

Lösung:

Für die Erzeugung von Sinusschwingungen muß das Koppelnetzwerk selektiv sein, d. h. die Schwingbedingung nur für *eine* Frequenz realisieren. Entscheidend dabei ist die *Phasenbedingung*, woraus sich die Forderung nach hoher *Phasensteilheit* $S_\varphi \equiv \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}f/f_0}$ in Umgebung der gewünschten Frequenz erklärt. Die Amplitudenbedingung, d. h. $|V_0(K_3 - K_r)| = 1$ muß in jedem Fall durch einen geeigneten Regelmechanismus eingestellt werden, denn die (lineare!) Schwingbedingung sagt über die sich einstellende Amplitude nichts aus. Die Schwingbedingung kann in der gegebenen Schaltung offenbar nur dann erfüllt werden, wenn bei reellem V_0 auch K_3 reell und $K_3 \geq K_r$ wird.

1. Wien-Zweig

Für eine harmonische Spannung u_a mit der Kreisfrequenz ω erhält man:

$$K_3 = \frac{(R_1 \| 1/j\omega C_1)}{(R_1 \| 1/j\omega C_1) + R_2 + 1/j\omega C_2} = \frac{1}{1 + \dfrac{R_2 + 1/j\omega C_2}{(R_1 \| 1/j\omega C_1)}}$$

$$= \frac{1}{1 + \dfrac{R_2 + 1/j\omega C_2}{(R_1/j\omega C_1)/(R_1 + 1/j\omega C_1)}} = \frac{1}{1 + \dfrac{R_2}{R_1} \cdot (1 + 1/j\omega R_2 C_2) \cdot (1 + j\omega R_1 C_1)}$$

$$K_3 = \frac{1}{1 + \dfrac{R_2}{R_1} + \dfrac{C_1}{C_2} + j\left(\omega R_2 C_1 - \dfrac{1}{\omega R_1 C_2}\right)}.$$

K_3 wird reell bei

$$\omega = \omega_0 \equiv \sqrt{\frac{1}{R_1 C_1 \cdot R_2 C_2}},$$

und man erkennt, daß bei $R_1 = R_2; C_1 = C_2$ (Sonderfall) in diesem Punkt K_3 den Wert $\frac{1}{3}$ annimmt. Mit der normierten Frequenz $\Omega \equiv \frac{\omega}{\omega_0}$ kann man auch schreiben

$$K_3 = \frac{1}{1 + \dfrac{R_2}{R_1} + \dfrac{C_1}{C_2} + j\sqrt{\dfrac{R_2 C_1}{R_1 C_2}}\left(\Omega - \dfrac{1}{\Omega}\right)}.$$

und für den Sonderfall

$$K_3 = \frac{1}{3 + j\left(\Omega - \dfrac{1}{\Omega}\right)}.$$

Der Klammerausdruck im Nenner wird "Verstimmung" v genannt. Diese geht bei $\omega = \omega_0$ durch Null, wechselt also dort das Vorzeichen. Dort hat der Betrag des Nenners sein Minimum, d. h. $|K_3|$ sein Maximum.

2. Wien-Robinson-Brücke mit $R_1 = R_2$; $C_1 = C_2$

Für die verlangten Diagramme muß die komplexe Größe K_3 nach Betrag und Phase dargestellt werden. Der Betrag von K_3 ist gleich dem Kehrwert des Betrages des Nenners. Der Phasenwinkel von K_3 ist gleich dem Negativen des Phasenwinkels des Nenners. Man erhält also

$$|K_3| = \frac{1}{3\sqrt{1+\frac{1}{9}\cdot\left(\Omega-\frac{1}{\Omega}\right)^2}} \qquad \varphi = -\arctan\frac{\Omega-1/\Omega}{3}.$$

Die Ortskurve von $\frac{1}{K_3}$ in der komplexen Ebene ist eine Parallele zur imaginären Achse, von K_3 also ein Kreis durch den Nullpunkt (Bild 2). Betrags- und Phasenverlauf zeigt Bild 3.

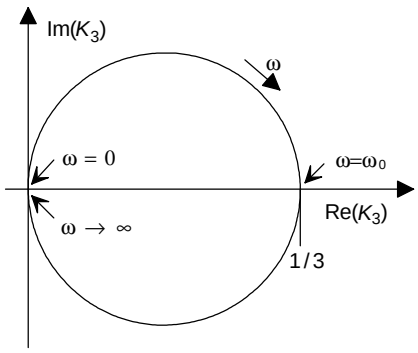

Bild 2

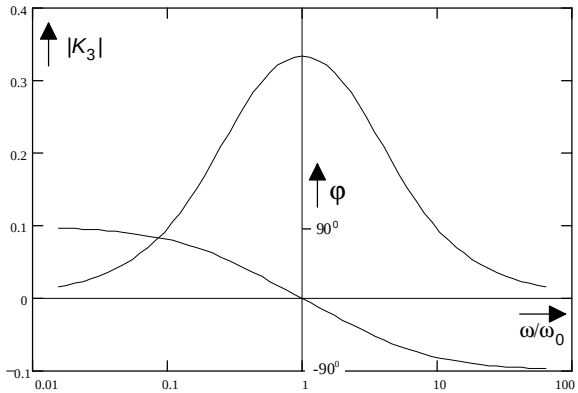

Bild 3

Die Phasensteilheit ist der Differentialquotient der Phase nach der normierten Frequenz:

$$S_\varphi \equiv \frac{d\varphi}{d\Omega} = -\frac{1}{1+\left(\frac{\Omega-1/\Omega}{3}\right)^2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(1+\frac{1}{\Omega^2}\right)$$

Bei $\omega = \omega_0$ bzw. $\Omega = 1$ ergibt das den Wert $-\frac{2}{3}$. Verwendet man zur Definition der Güte des Wien-Zweiges die vom LC-Kreis bekannte Beziehung $|S_\varphi| = 2Q$, so ergibt sich eine Güte von

$$Q_{äqu} = \frac{1}{3}.$$

Die Phasensteilheit der Wien-Robinson-Brücke ist sehr viel größer als die des Wien-Zweiges allein. Die Brückenspannung ist gegeben durch

$$u_P - u_N = u_a \cdot (K_3 - K_r).$$

Da K_r positiv und reell ist, erhält man die Ortskurve von $K_3 - K_r \equiv K$ durch Linksverschiebung der Ortskurve von K_3.

Für den eingeschwungenen Zustand gilt

$$u_a \cdot K \cdot V_0 = u_a,$$

d. h. die Schleifenverstärkung KV_0 ist gleich 1. Unter der Voraussetzung, daß V_0 reell bleibt, liegt dann die Ortskurve von K so, daß sie die relle Achse bei

$$K = \frac{1}{(V_0)_{\omega=\omega_0}}$$

schneidet (Bild 4). Damit die Schwingbedingung überhaupt erfüllt werden kann, muß also bei Erfüllung der Phasenbedingung $|K| > 0$ bleiben.

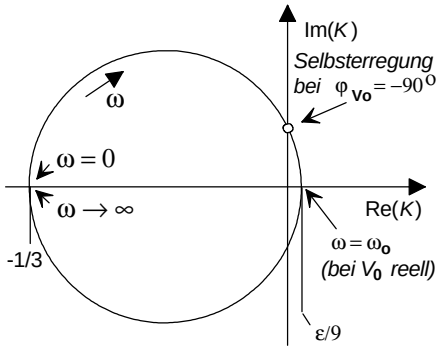

Bild 4

Die Ortskurve von K muß die reelle Achse im Positiven (rechts vom Nullpunkt) schneiden. Das bedeutet

$$(K)_{\Omega=1} = (K_3 - K_r)_{\Omega=1} \geq 0$$

oder

$$\frac{1}{1 + \frac{R_2}{R_1} + \frac{C_1}{C_2}} - \frac{R_4}{R_3 + R_4} \geq 0$$

$$1 + \frac{R_2}{R_1} + \frac{C_1}{C_2} \leq 1 + \frac{R_3}{R_4}, \qquad \frac{R_3}{R_4} \geq \frac{R_2}{R_1} + \frac{C_1}{C_2}$$

oder

$$R_3 = \left(\frac{R_2}{R_1} + \frac{C_1}{C_2} + \varepsilon\right) \cdot R_4$$

und für den Sonderfall

$$R_3 = (2 + \varepsilon) \cdot R_4$$

Dann wird

$$(K)_{\Omega=1} = \frac{1}{1 + \frac{R_2}{R_1} + \frac{C_1}{C_2}} - \frac{1}{1 + \frac{R_2}{R_1} + \frac{C_1}{C_2} + \varepsilon} = \frac{1}{a} - \frac{1}{a + \varepsilon}$$

$$\cong \frac{\varepsilon}{a^2} = \frac{\varepsilon}{\left(1 + \frac{R_2}{R_1} + \frac{C_1}{C_2}\right)^2}$$

und für den Sonderfall

$$(K)_{\Omega=1} \cong \frac{\varepsilon}{9}$$

Um die Schleifenverstärkung $|K \cdot V_0| \Rightarrow 1$ zu machen, ist ein Verstärkungsfaktor $V_0 \geq \frac{9}{\varepsilon}$ erforderlich. Durch den notwendigen Amplituden-Regelmechanismus stellt sich $K \cdot V_0 = 9$ ein.

Die entstehende Schwingfrequenz

$$f = f_0 = \frac{1}{2\pi \cdot \sqrt{R_1 C_1 \cdot R_2 C_2}}$$

ist *unabhängig* von V_0.

Die Vergrößerung der Phasensteilheit gegenüber dem Wert $-\frac{2}{3}$ beim Wien-Zweig kann man wieder durch Ableitung $S_\varphi = \frac{d\varphi}{d\Omega}$ oder geometrisch ermitteln (Bild 5):

$$\frac{\delta}{\mathrm{Re}(K_3)} = \tan\alpha; \qquad \frac{\delta}{\mathrm{Re}(K)} = \tan\beta$$

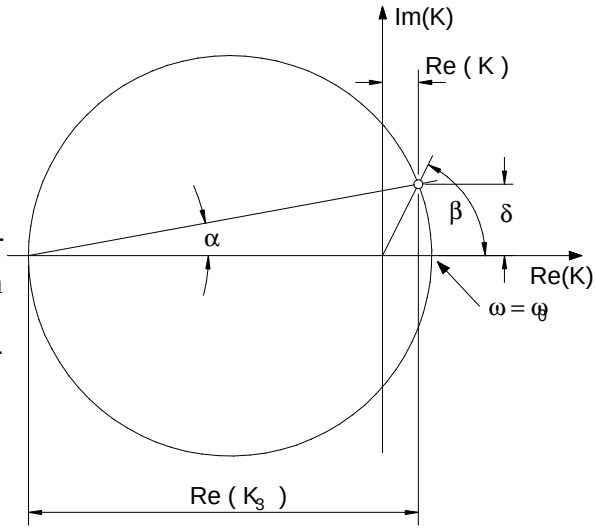

Bild 5

$$\lim_{\Delta\omega \to 0} \frac{\beta}{\alpha} = \lim_{\delta \to 0} \frac{\arctan \frac{\delta}{\mathrm{Re}(K)}}{\arctan \frac{\delta}{\mathrm{Re}(K_3)}} = \frac{K_3}{K}$$

Die Phasenänderung in Umgebung von $\omega = \omega_0$ für ein $\Delta\omega$ ist bei der Wien-Robinson-Brücke um den Faktor $\frac{K_3}{K}$ größer als beim Wien-Zweig allein.

Mit $K_3 = \frac{1}{3}$ und $K = \frac{\varepsilon}{9}$ folgt $\frac{K_3}{K} = \frac{3}{\varepsilon}$. Aus der Phasensteilheit des Wien-Zweiges $S_{K3} = \frac{2}{3}$ und damit $Q = \frac{1}{3}$ erhält man damit für die Wien-Robinson-Brücke $S_K = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{\varepsilon} = \frac{2}{\varepsilon}$ und $Q = \frac{1}{\varepsilon}$. Bei einem (reellen!) Verstärkungfaktor von z. B. $V_0 = 10^4$ sind also ein $\varepsilon \approx 10^{-3}$ und $Q \approx 10^3$ (vgl. Bild 6) erreichbar.

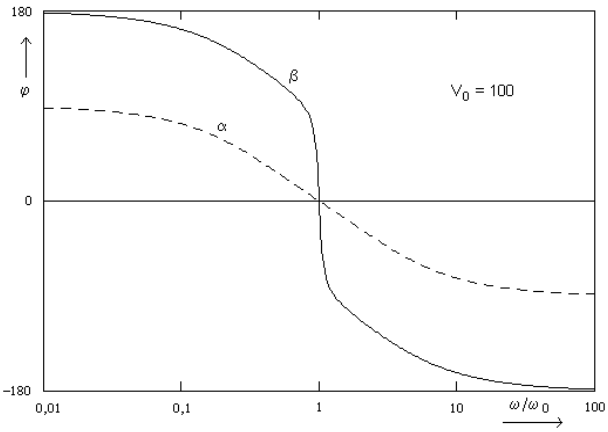

Bild 6

3. Bestimmung der Bauelemente (vgl. Bild 1)

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{R_1 C_1 \cdot R_2 C_2}}$$

Mit $R_1 C_1 = R_2 C_2 = RC$ folgt

$$C_1 = \frac{1}{\omega_0 R_1} = \frac{1}{2\pi \cdot 7,5 \cdot 10^4} \left[\frac{\mathrm{As}}{\mathrm{V}}\right] = 2,12 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{F} = 2,12\,\mu\mathrm{F}$$

und

$$R_1 C_1 = RC = \frac{1}{2\pi \cdot 7,5\,\mathrm{Hz}} = 21,2 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{s}.$$

Aus der Schwingbedingung

$$\frac{R_2}{R_1}+\frac{C_1}{C_2}=\frac{R_2C_2+R_1C_1}{R_1C_2}=\frac{R_3}{R_4}$$

ergeben sich

$$C_2=\frac{R_1C_1+R_2C_2}{R_1R_3}\cdot R_4=\frac{42,4\cdot 10^{-3}\ \mathrm{s}}{10^8\ \Omega^2}\cdot 160\,\Omega=6800\cdot 10^{-11}\frac{\mathrm{As}}{\mathrm{V}}=68\ \mathrm{nF}$$

sowie

$$R2=\frac{21,2\cdot 10^{-3}\ \mathrm{s}}{68\cdot 10^{-9}\ \mathrm{As/V}}=0,312\cdot 10^{-6}\,\Omega=312\ k\Omega$$

.

Anhang

Standard-OPV haben Grenzfrequenzen der offenen Verstärkung im Bereich von f_1 = 10 ... 100 Hz. Für höhere Oszillatorfrequenzen f ist dann

$$V_0=\frac{(V_0)_0}{1+j\cdot\frac{f}{f_1}}$$

nicht mehr reell, sondern es gilt

$$V_0\approx -j\cdot\frac{(V_0)_0}{\frac{f}{f_1}}.$$

Um der Phasenbedingung zu genügen, muß dann K positiv imaginär werden. Mit $v\equiv\left(\Omega-\frac{1}{\Omega}\right)$ kann man schreiben

$$K=\frac{1}{3+jv}-\frac{1}{3+\varepsilon}\cong\frac{\varepsilon-jv}{3\cdot(3+jv)}=\frac{1}{3}\cdot\frac{(\varepsilon-jv)\cdot(3+jv)}{9+v^2}=\frac{1}{3}\cdot\frac{3\varepsilon-v^2-j\cdot 3v}{9+v^2}$$

und erhält die o. g. Bedingung $v=-\sqrt{3\varepsilon}$ und daraus die Schwingfrequenz f_r. Dort wird

$$K=j\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{3\sqrt{3\varepsilon}}{9+3\varepsilon}\approx j\cdot\sqrt{\frac{\varepsilon}{27}},$$

und wegen $|KV_0|$ = 1 stellt sich ein (Regelmechanismus!)

$$\sqrt{\frac{\varepsilon}{27}}\cdot\frac{(V_0)_0}{f_r/f_1}=1,\quad \text{d. h. } f_r=f_1\cdot(V_0)_0\cdot\sqrt{\frac{\varepsilon}{27}}=f_1\cdot(V_0)_0\cdot\frac{(-\nu)}{9}=-\frac{2\Delta f}{f_0}\cdot\frac{f_1\cdot(V_0)_0}{9}=f_0-\Delta f$$

Damit wird aber die Verstimmung $v\approx 2\cdot\Delta f/f_0$, d. h. die Abweichung von $f_0=1/2\pi\cdot RC$, abhängig von der Grenzfrequenz f_1 und von der offenen Verstärkung $(V_0)_0$ des OPV:

$$\frac{\Delta f}{f_0}\cong-\frac{9}{2}\cdot\frac{f_0}{f_1\cdot(V_0)_0}=-\frac{9}{2}\cdot\frac{f_0}{f_T}.$$

Auch die Phasensteilheit des Koppelfaktors fällt auf den Wert $S_\varphi=-\frac{2}{3}$ des Wien-Zweiges zurück, wie man zeigen kann.