Hélène Esnault und Eckart Viehweg **Forschung**

Die Mathematik ist mit die älteste der Wissenschaften, und schon in der Antike war die Geometrie eines ihrer zentralen Themen. In der algebraischen Geometrie sind die untersuchten Gebilde Lösungsmengen von Gleichungen, genauer gesagt, die Nullstellenmengen von Polynomen in mehreren Variablen, zum Beispiel bei den Griechen Kreise und Kegelschnitte. Betrachtet man "viele" Gleichungen in "vielen" Variablen, stösst man schnell an die Grenze dessen, was berechenbar ist, oder gar gezeichnet werden kann. Die Mathematik, noch stärker die Geometrie, hat sich so in ihrer Geschichte zur Kunst des abstrakten Denkens entwickelt. Dies ist die Schönheit der Mathematik, und vielleicht auch der Grund, weshalb Intellektuelle immer wieder zur Mathematik hingezogen wurden. Gleichzeitig erlaubt die Abstraktion auch die Lösung praktischer Probleme: Von den Vermessungsmethoden der Babyloner und Ägypter bis zur Weltraumfahrt, vom chinesischen Restesatz, der es angeblich einem chinesischen General erlaubte, mi Kongruenzen die Anzahl der Überlebenden nach der Schlacht zu bestimmen, bis hin zu den CDs und der Kryptographie. Abstraktes Denken erlaubt manchmal, Antworten zu finden, die sich rechnerischen Methoden entziehen, selbst heute unter Einsatz grosser Computer.

In der Mitte des zwanzigsten Jahrhunderts wurden die algebraischen Grundlagen der Geometrie neu überdacht, und neue Methoden zur Untersuchung geometrischer Gebilde geschaffen. Trotzdem zwingt die Komplexität derselben den algebraischen Geometer auch Methoden anderer Zweige der Mathematik einzusetzen, wie solche der Arithmetik, Topologie, Differentialgeometrie und Analysis. Es ist faszinierend, wenn man gewisse Eigenschaften dieser zunächst so unzugänglichen Objekte tatsächlich beschreiben kann, Eigenschaften die ausserhalb der Geometrie wiederum für die Zahlentheorie und Physik von großem Interesse sein können.

Hélène Esnault. Die Schwerpunkte der Forschung sind:

1) Hodge theoritische Eigenschaften projektiver Varietäten,
2) Charakteristische Klassen algebraischer Zusammenhänge,
3) Gauß-Manin Zusammenhänge und deren Riemann-Roch Formeln,
4) Algebraische Zykel.

In 1) sieht man wunderbar das Zwischenspiel zwischen der Arithmetik und der Geometrie. In der Zahlentheorie kann man eine Kongruenz für die Anzahl rationaler Punkte über endlichen Körpern gewisser projektiven Varietäten ausrechnen. Dies habe ich in Verbindung gebracht mit Hodge Theorie, das heißt im Endeffekt mit Differentialgleichungen. Die Aussagen, die man erhält, sind stärker, als das, was der arithmetische Satz vorhersagt, und man erhält eine Vermutung in der Arithmetik, die aus der Geometrie kommt. In 2) habe ich Gruppen definiert, die in natürlicher Weise Klassen von "Zusammenhängen" empfangen. Letztere sind eine Verallgemeinerung des Differenzierens, ein Begriff, der auf Leibniz und Newton zurückgeht. Sie entsprechen auf der arithmetischen Seite l-adischen Darstellungen. Für die ist man noch nicht imstande, ähnliche Klassen zu definieren. 3) beschäftigt sich mit der Variation von "Zusammenhängen" in Familien. Hier ist die arithmetische l-adische Theorie ein Modell, und es besteht wieder Hoffnung, dass ein besseres geometrisches Verständnis zu neuen Erkenntnissen auf der arithmetischen Seite führen könnte. Algebraische Zykel (4) sind kaum verstanden, obgleich, in einem gewissen Sinne, eine Theorie vorhanden ist. Sie hakt daran, dass viele grundlegende Fakten mit den jetzt vorhandenen Werkzeugen nicht überprüft werden können. Hier war mein Beitrag eher vernichtend, ich habe einige Vermutungen widerlegt.

Eckart Viehweg. Ein Leitmotiv der algebraischen Geometrie ist die Klassifikation aller Varietäten, also aller möglichen Nullstellenmengen: Gewissermaßen ein Versuch, etwas Ordnung in die Hirarchie der geometrischen Objekte zu bringen. Auch wenn sich weltweit viele Mathematiker mit der Klassifikationstheorie befassen, steckt das Gebiet noch in den Kinderschuhen. Man hofft, für jede Varietät ein besonders schönes Modell zu finden, diese dann in grobe Klassen einzuteilen, und letztendlich für jede dieser Klassen Parameter zu finden.
In diesen Bereich fallen die Schwerpunkte meiner Interessen:

1) Numerische Invarianten algebraischer Varietäten,
2) Familien von Varietäten und Hodge Strukturen,
3) Parameterräume (Moduli) und ihre Eigenschaften.

Ein Verschwindungssatz, eine Methode, gewisse Strukturaussagen für algebraische Varietäten auf die von weniger komplizierten Varietäten zu reduzieren, wurde vor 18 Jahren von mir und zeitgleich von einem japanischen Mathematiker entdeckt. Zunächst war dies eher ein Nebenprodukt der Theorie, mit einem verblüffend einfachen Beweis. Inzwischen aber sind solche Sätze ein wichtiges Handwerkszeug der algebraischen und analytischen Geometrie geworden. Nachdem die Konstruktion algebraischer Parameterräume für eine große Klasse von Varietäten gelungen war, stand in den letzten Jahren die Untersuchung der Eigenschaften solcher Moduli im Vordergrund, insbesondere der ihrer Differentialformen.

Hélène und Eckart. Die Anwendung von Verschwindungssätzen ausserhalb der Klassifikationstheorie stand am Beginn unserer gemeinsamen Arbeiten. Zunächst nutzten wir sie für elementare, aber für Rechnungen zu komplexe Fragestellungen, die der Zahlentheorie entstammen, für die Konstruktion und Beschreibung von

Polynomen mit vorgegebenen Nullstellen. Danach wandten wir sie an um ein klassisches Problem der Singularitätentheorie zu lösen. Unser beider Freude an der Mathematik führte seither zu einer Serie gemeinsamer Arbeiten. Die individuellen Arbeitsgebiete haben viele Berührungspunkte. Am deutlichsten wurde dies bei der Schaffung einer allgemeinen Theorie der Verschwindungssätze, die eine Brücke zwischen den bei Hélène genannten "Zusammenhängen", der Hodge Theorie und den Methoden der Klassifikationstheorie schlug. Aber auch in der Konstruktion gewisser Parameterräume für algebraische Zykel konnten wir unsere Spezialitäten, Moduli für Eckart und Zykel für Hélène, sinnvoll binden. Die Stärke unserer gemeinsamen Arbeit kommt aus der unterschiedlichen Ausbildung, den unterschiedlichen mathematischen Motivierungen, bei Fragen, die bei beiden eine grosse Neugierde erzeugen. Bei Hélène vielleicht die Zuneigung zum formaleren, bei Eckart das geometrische Gespür.

Ein Mathematikerpaar mit zwei Lehrstühlen an einer Universität, das ist in Deutschland eine Seltenheit, vielleicht einmalig. Es lässt in dem bestehenden Universitätssystem kaum Möglichkeiten für einen Ortswechsel. Wir haben versucht, dazu beizutragen, die junge Universität Essen zu einem international anerkannten Zentrum für Mathematik zu machen, und eine Arbeitsgruppe zu schaffen, die Mathematiker weltweit oft und gerne besuchen. Durch den Einsatz anderer Essener Mathematiker mit ähnlichen Ansprüchen, insbesondere durch Gerhard Frey, Jürgen Herzog und Stefan Müller-Stach, scheint uns dies gelungen zu sein. Ihnen, und auch unseren Doktoranden, Assistenten und Besuchern, gilt unser Dank.

Der Alltag des Mathematikers ähnelt manchmal dem eines Dichters oder Philosophens. Man sitzt, mit einem Bleistift, malt kleine Buchstaben, stoppt, denkt, malt wieder, und schaut. Dann wiederholt sich der Vorgang. Manchmal ist das sehr trocken. Nichts mehr versteht man, jeder Schritt bringt nur Dunkelheit. Und irgendwann, empfindet man das starke Gefühl, diese eine Idee könnte alles erklären, Licht sei in Reichweite. Diese kurzen Sekunden des Verstehens sind die Krönung des Lebens eines Mathematikers, die absolute Freude. Die haben wir immer so gerne mit anderen Mathematikern geteilt. Bisher 14 Coautoren für Hélène, etwas weniger für Eckart, den unterschiedlichsten Ländern entstammend. Der Leibniz Preis ist auch für sie.